Ministerul Educației Naționale
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a XII-a

Varianta 2

Problema 1. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţia $\max_{0\le x\le 1} |f(x)| = 1$, şi fie $I\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$,

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(0) + f(1).$$

(a) Arătaţi că $I(f) < 3$, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}$.
(b) Determinaţi $\sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$.

Problema 2. Fie p un număr natural mai mare sau egal cu 2 şi fie $(M,\cdot)$ un monoid finit, astfel încât $a^p \ne a$, oricare ar fi $a \in M \setminus \{e\}$, unde e este elementul neutru al lui M. Arătaţi că $(M,\cdot)$ este grup.

Gazeta Matematică

Problema 3. Arătaţi că o funcţie continuă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este crescătoare dacă şi numai dacă

$$(c-b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le (b-a)\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

oricare ar fi numerele reale $a < b < c$.

Problema 4. Fie n şi q două numere naturale, $n \ge 2$, $q \ge 2$ şi $q \not\equiv 1 \pmod 4$, şi fie K un corp finit care are exact q elemente. Arătaţi că, oricare ar fi elementul a din K, există x şi y în K, astfel încât $a = x^{2^n} + y^{2^n}$. (Orice corp finit este comutativ.)

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.